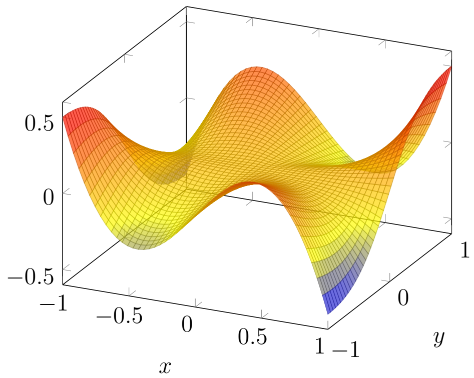
Dérivées d'ordres supérieurs et applications

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Dérivées du second ordre

Exercice 1. Calculer un développement limité en l'origine et à l'ordre 2 des fonctions suivantes :
1. $f(x, y) = x^2(x + y)$.
2. $f(x, y, z) = ze^{xy}$.

Exercice 2.* (Contre exemple au théorème de Schwarz) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

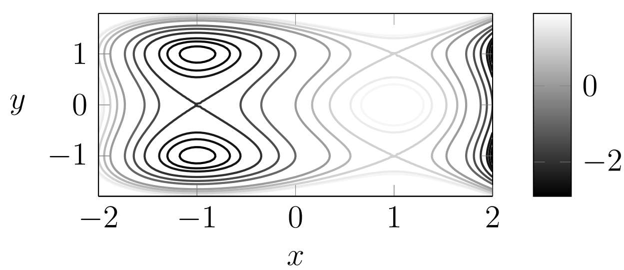


1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
3. La fonction f est elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
5. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient
1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \cos(x + y)$.

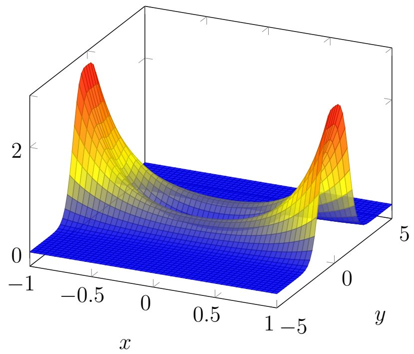
2 Extrema

Exercice 4. Voici les courbes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$.



1. À partir de la figure : identifier les points critiques de f et préciser leur nature.
2. Retrouver les résultats de la question 1. par le calcul.

Exercice 5. Étudier les extrema de la fonction f définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.



Exercice 6. (Droite des moindres carrés) Soient n points $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 > 0. \tag{$*$}$$

On cherche à minimiser la fonctionnelle $d(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ définie pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1. Que signifie la condition $(*)$?
2. Démontrer qu'il existe un unique point critique (a^*,b^*) de d.
3. Démontrer que ce point critique est un minimum.
4. On donne les points suivants

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9

Calculer (a^*,b^*) et représenter graphiquement la droite des moindres carrés.

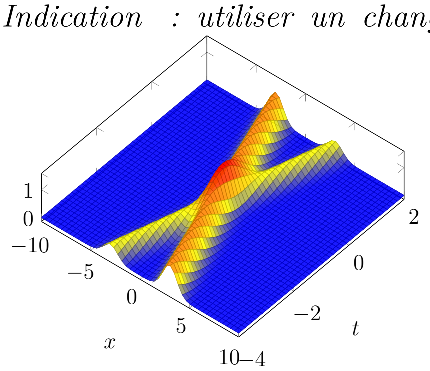
3 Équations aux dérivées partielles

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Calculer Δg en fonction de Δf où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Exercice 8.* (Équation des cordes vibrantes) Soit c un réel non nul. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) \qquad \text{pour tout } x,t\in\mathbb{R}.$$

Indication : utiliser un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.



Un exemple de solution : $f(x,t) = \frac{1}{2}\exp(-(x-t-1)^2) + \exp(-(x+t+1)^2)$